3.1
Ασκήσεις σχ. βιβλίου σελίδας 144 – 146

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

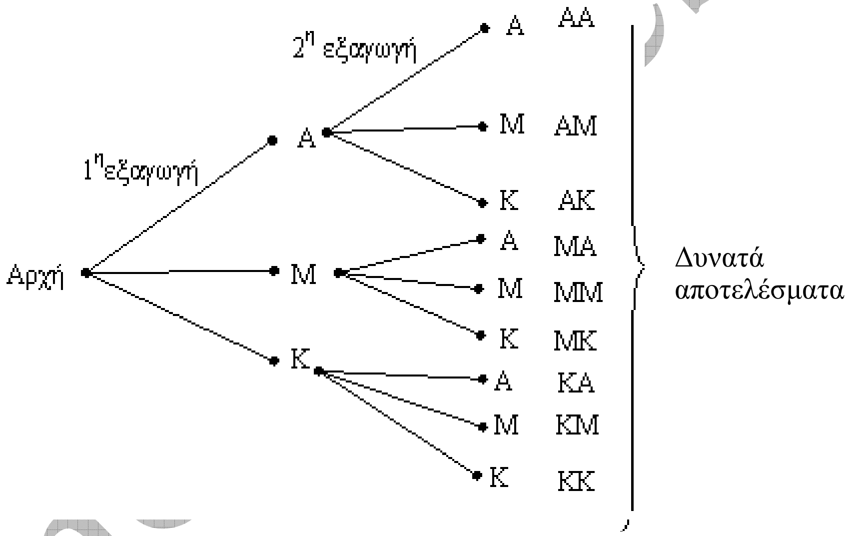
1.

Ένα κουτί έχει τρεις μπάλες , μια άσπρη , μια μαύρη και μια κόκκινη . Κάνουμε το εξής πείραμα : παίρνουμε από το κουτί μια μπάλα , καταγράφουμε το χρώμα της και την ξαναβάζουμε στο κουτί. Στη συνέχεια παίρνουμε μια δεύτερη μπάλα και καταγράφουμε επίσης το χρώμα της (όπως λέμε παίρνουμε διαδοχικά δύο μπάλες με επανατοποθέτηση) .

i) Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος του πειράματος ;
ii) Ποιο είναι το ενδεχόμενο “ η πρώτη μπάλα είναι κόκκινη”
iii) Ποιο είναι το ενδεχόμενο “ να εξαχθεί και τις δύο φορές μπάλα με το ίδιο χρώμα”;

i)

Λύση
Δε



Όπου Α είναι το ενδεχόμενο “η μπάλα είναι άσπρη” Μ είναι το ενδεχόμενο “η μπάλα είναι μαύρη” και Κ είναι το ενδεχόμενο “η μπάλα είναι κόκκινη”

Από το παραπάνω δεντροδιάγραμμα βρίσκουμε ότι ο δειγματικός χώρος Ω είναι ο

$$\Omega = \{ AA, AM, AK, MA, MM, MK, KA, KM, KK \}$$

ii)
Το ενδεχόμενο “η πρώτη μπάλα είναι κόκκινη” είναι το { ΚΑ , ΚΜ , ΚΚ}

iii)
Το ενδεχόμενο “μπάλα του ιδίου χρώματος και στις δύο εξαγωγές” είναι το { ΑΑ , ΜΜ , ΚΚ}

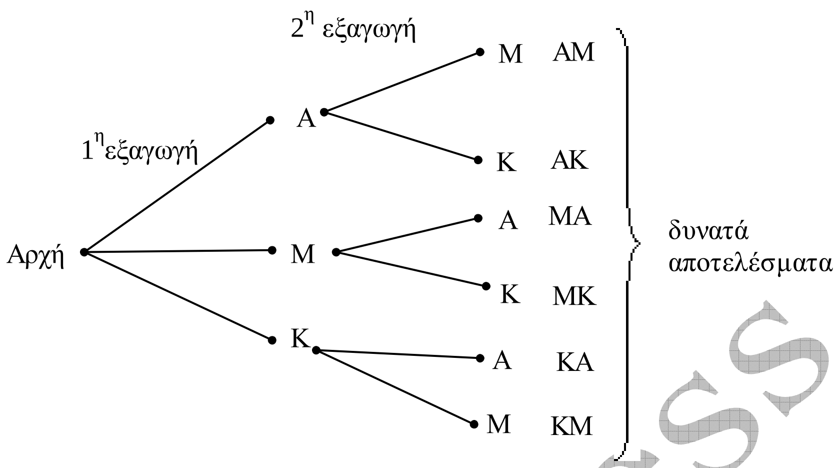
2.

Να επιλυθεί το προηγούμενο πρόβλημα , χωρίς όμως τώρα να γίνει επανατοποθέτηση της πρώτης μπάλας πριν την εξαγωγή της δεύτερης (όπως λέμε παίρνουμε διαδοχικά δύο μπάλες χωρίς επανατοποθέτηση)

Λύση

i)

Δεντροδιάγραμμα



Οπότε ο δειγματικός χώρος Ω είναι Ω = {ΑΜ , ΑΚ , ΜΑ , ΜΚ , ΚΑ , ΚΜ}

ii)

Το ενδεχόμενο “ η πρώτη μπάλα είναι κόκκινη” είναι {ΚΜ , ΚΑ}

iii)

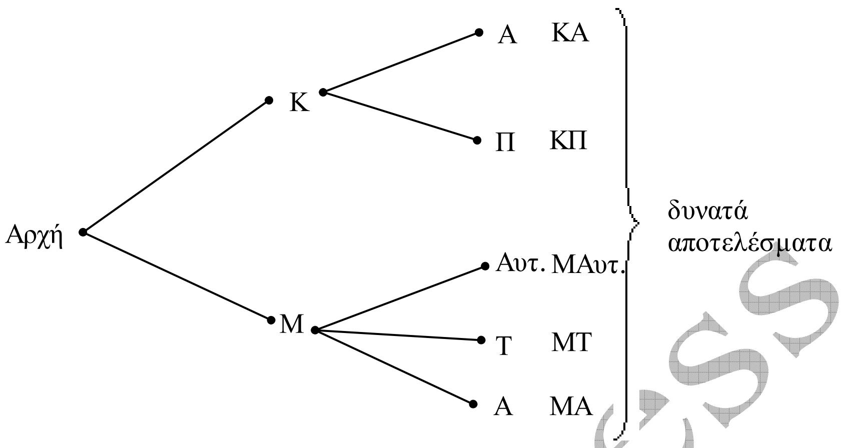
Το ενδεχόμενο “ μπάλα με το ίδιο χρώμα και στις δύο εξαγωγές” είναι το ∅

3.
Μια οικογένεια από την Αθήνα αποφασίζει να κάνει τις επόμενες διακοπές της στην Κύπρο (Κ) ή στη Μακεδονία (Μ). Στην Κύπρο μπορεί να πάει με αεροπλάνο (Α) ή με πλοίο (Π). Στη Μακεδονία μπορεί να πάει με το αυτοκίνητό της (Αυτ), με τρένο (Τ) ή με αεροπλάνο (Α). Αν ως αποτέλεσμα του πειράματος θεωρήσουμε τον τόπο διακοπών και το ταξιδιωτικό μέσο, τότε :

i) Να γράψετε το δειγματικό χώρο Ω του πειράματος

ii) Να βρείτε το ενδεχόμενο Α: "η οικογένεια θα πάει με αεροπλάνο" στον τόπο των διακοπών της"

Λύση



i) Ω = { ΚΑ , ΚΠ , ΜΑυτ , ΜΤ , ΜΑ}

ii) Α={ ΚΑ , ΜΑ}.

4.

Ένα ξενοδοχείο προσφέρει γεύμα που αποτελείται από τρία πιάτα . Το κύριο πιάτο, το συνοδευτικό και το γλυκό. Οι δυνατές επιλογές δίνονται στον παρακάτω πίνακα

Γεύμα	Επιλογές
Κύριο πιάτο	Κοτόπουλο ή φιλέτο
Συνοδευτικό	Μακαρόνια ή ρύζι ή χόρτα
Γλυκό	Παγωτό ή τούρτα ή ζελέ

Ένα άτομο πρόκειται να διαλέξει ένα είδος από κάθε πιάτο

i) Να βρείτε το δειγματικό χώρο του πειράματος

ii) Να βρείτε το ενδεχόμενο Α : "το άτομο επιλέγει παγωτό"

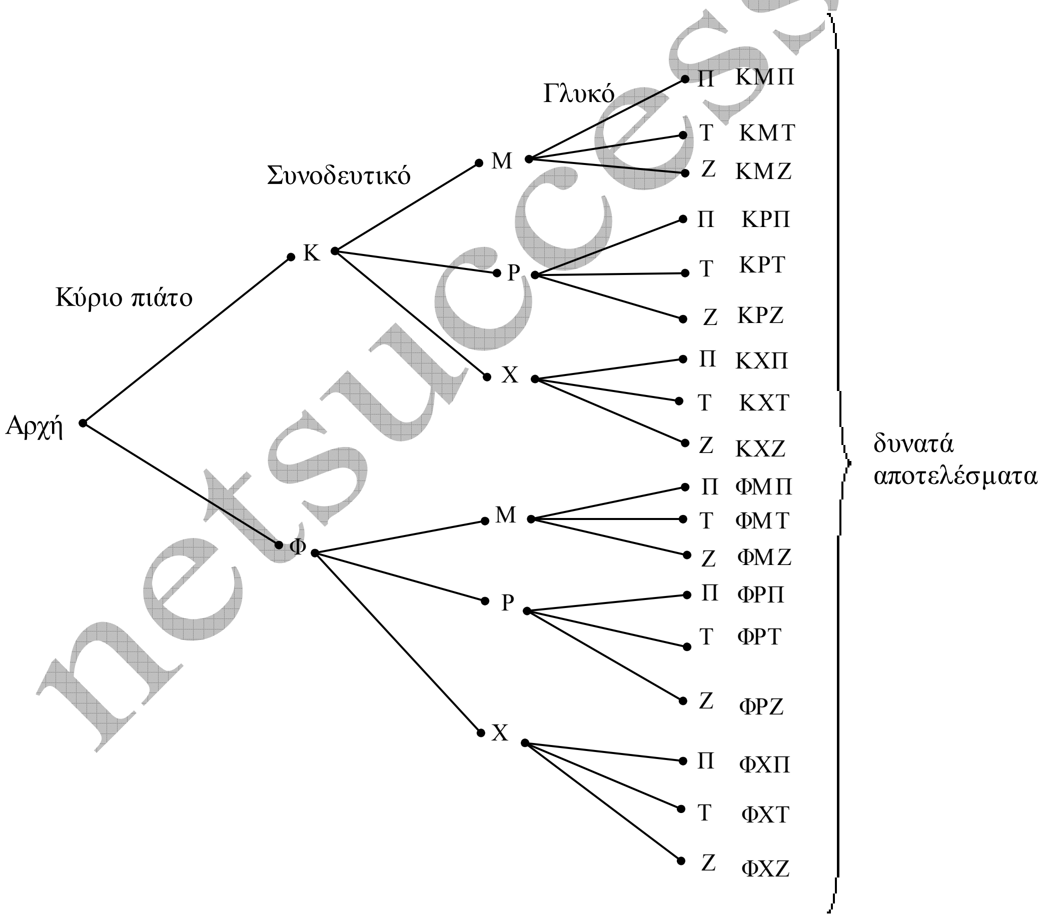
iii) Να βρείτε το ενδεχόμενο Β : "το άτομο επιλέγει κοτόπουλο"

iv) Να βρείτε το ενδεχόμενο $A \cap B$

v) Αν Γ είναι το ενδεχόμενο : "το άτομο επιλέγει ρύζι" , να βρείτε το ενδεχόμενο $(A \cap B) \cap \Gamma$

Λύση

Φτιάχνουμε δεντροδιάγραμμα του πειράματος



Με τη βοήθεια του παραπάνω δενδροδιαγράμματος έχουμε ότι

i)

Ω = { ΚΜΠ , ΚΜΤ , ΚΜΖ , ΚΡΠ , ΚΡΤ , ΚΡΖ , ΚΧΠ , ΚΧΤ , ΚΧΖ ,
ΦΜΠ , ΦΜΤ , ΦΜΖ , ΦΡΠ , ΦΡΤ , ΦΡΖ , ΦΧΠ , ΦΧΤ , ΦΧΖ }

ii)
Το ζητούμενο ενδεχόμενο θα έχει σαν στοιχεία όλα τα αποτελέσματα που περιέχουν το Π (παγωτό), άρα Α = { ΚΜΠ , ΚΡΠ , ΚΧΠ ,ΦΜΠ , ΦΡΠ , ΦΧΠ }

iii)
Ομοίως το ενδεχόμενο Β θα περιέχει σαν στοιχεία όλα τα αποτελέσματα που περιέχουν το Κ (κοτόπουλο), άρα

Β = {ΚΜΠ , ΚΜΤ , ΚΜΖ , ΚΡΠ , ΚΡΤ , ΚΡΖ , ΚΧΠ , ΚΧΤ, ΚΧΖ }

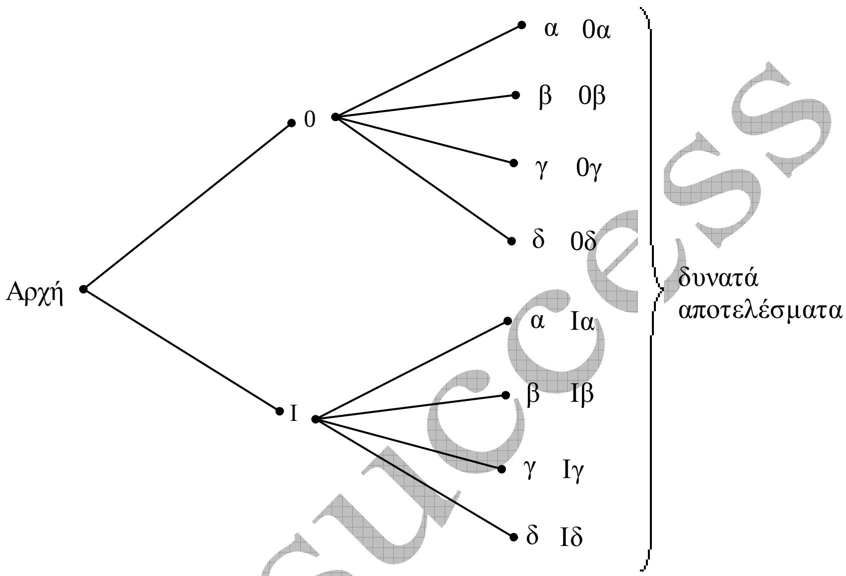
iv)
$A \cap B$ = { ΚΜΠ , ΚΡΠ , ΚΧΠ }

v)
Γ = {ΚΡΠ , ΚΡΤ , ΚΡΖ , ΦΡΠ , ΦΡΤ , ΦΡΖ} ,
οπότε $(A \cap B) \cap \Gamma$ = { ΚΡΠ}

5.
Η διεύθυνση ενός νοσοκομείου κωδικοποιεί τους ασθενείς σύμφωνα με το αν είναι ασφαλισμένοι ή όχι και σύμφωνα με την κατάσταση της υγείας τους, η οποία χαρακτηρίζεται ως καλή , μέτρια , σοβαρή και κρίσιμη . Η διεύθυνση καταγράφει με 0 τον ανασφάλιστο και με Ι τον ασφαλισμένο , και στην συνέχεια δίπλα γράφει ένα από τα γράμματα α , β , γ , δ , ανάλογα αν η κατάστασή του είναι καλή , μέτρια , σοβαρή ή κρίσιμη . Θεωρούμε το πείραμα της κωδικοποίησης ενός νέου ασθενούς . Να βρείτε :

i) Το δειγματικό χώρο του πειράματος
ii) Το ενδεχόμενο Α : " η κατάσταση του ασθενούς είναι σοβαρή ή κρίσιμη και είναι ανασφάλιστος"
iii) Το ενδεχόμενο Β : " η κατάσταση του ασθενούς είναι καλή ή μέτρια"
iv) Το ενδεχόμενο Γ: "ο ασθενής είναι ασφαλισμένος"

Λύση



i) Από το παραπάνω δεντροδιάγραμμα βρίσκουμε ότι ο δειγματικός χώρος Ω είναι

Ω = { 0α , 0β , 0γ , 0δ , Ια , Ιβ , Ιγ , Ιδ}

ii)
Α = { 0γ , 0δ}

iii)
Β = {0α , 0β , Ια , Ιβ }

iv)
Γ = {Ια , Ιβ , Ιγ , Ιδ}

6.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ασυμβίβαστα :

i) Ρίχνουμε ένα ζάρι . Α είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε 3 και Β είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε άρτιο αριθμό .

ii) Επιλέγουμε ένα άτομο. Α είναι το ενδεχόμενο να έχει γεννηθεί στην Ελλάδα και Β το ενδεχόμενο να είναι καθολικός

iii) Επιλέγουμε μια γυναίκα . Α είναι το ενδεχόμενο να έχει ηλικία άνω των 30 και Β το ενδεχόμενο να είναι παντρεμένη πάνω από 30 χρόνια

iv) Επιλέγουμε κάποιον με ένα αυτοκίνητο . Α είναι το ενδεχόμενο το αυτοκίνητό του να είναι ευρωπαϊκό και Β το ενδεχόμενο να είναι ασιατικό .

Λύση

i)

Τα ενδεχόμενα **είναι** ασυμβίβαστα διότι $A = \{3\}$ και $B = \{2, 4, 6\}$, οπότε $A \cap B = \varnothing$

ii)

Τα ενδεχόμενα **δεν είναι** ασυμβίβαστα , διότι όπως όλοι ξέρουμε υπάρχουν Έλληνες καθολικοί οπότε $A \cap B \neq \varnothing$

iii)

Τα ενδεχόμενα **δεν είναι** ασυμβίβαστα διότι υπάρχουν γυναίκες με ηλικία μεγαλύτερη των 30 ετών που είναι παντρεμένες περισσότερο από 30 χρόνια οπότε $A \cap B \neq \varnothing$

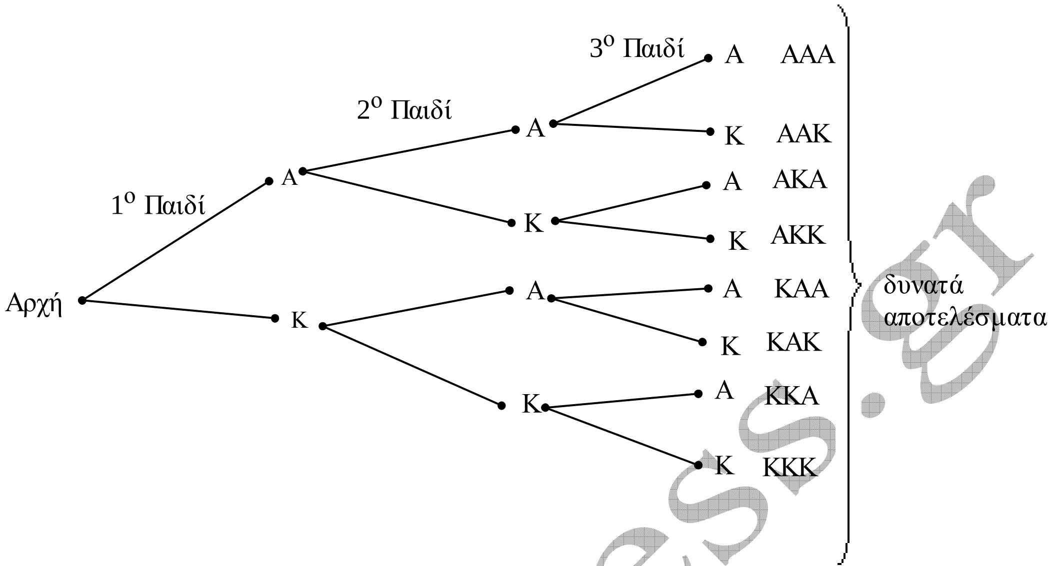
iv)

Τα ενδεχόμενα **είναι** ασυμβίβαστα αφού , ένα αυτοκίνητο που είναι ευρωπαϊκό δεν μπορεί να είναι και ασιατικό δηλαδή $A \cap B = \varnothing$

7.
Μεταξύ των οικογενειών με τρία παιδιά επιλέγουμε τυχαία μια οικογένεια και εξετάζουμε τα παιδιά ως προς το φύλο και ως προς τη σειρά γέννησής τους . Να γράψετε το δειγματικό χώρο του πειράματος .

Λύση

Α = αγόρι και Κ = κορίτσι

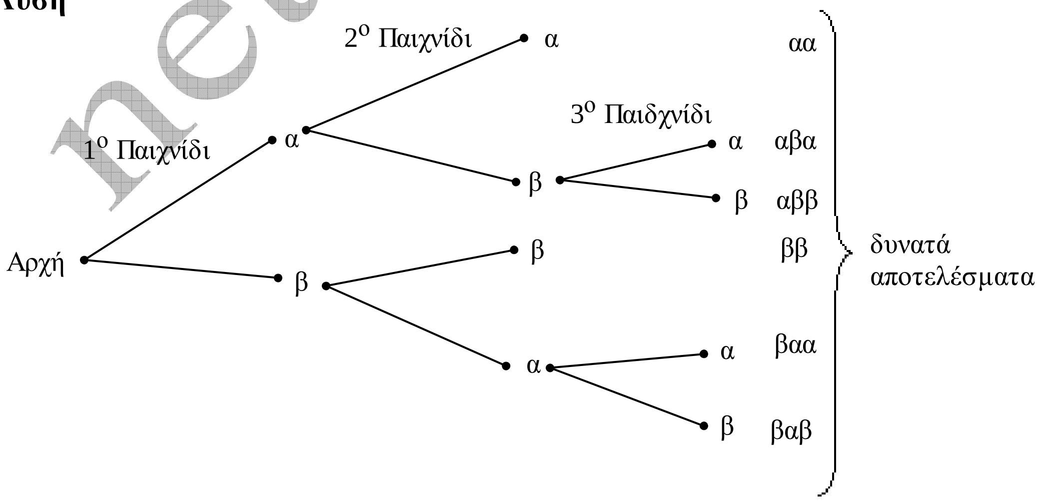


Ω = { ΑΑΑ , ΑΑΚ , ΑΚΑ , ΑΚΚ , ΚΑΑ , ΚΑΚ , ΚΚΑ , ΚΚΚ }

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1.
Δύο παίκτες θα παίξουν σκάκι και συμφωνούν νικητής να είναι αυτός που θα κερδίσει πρώτος δύο παιχνίδια . Αν α είναι το αποτέλεσμα να κερδίσει ο πρώτος παίκτης ένα παιχνίδι και β είναι το αποτέλεσμα να κερδίσει ο δεύτερος παίκτης ένα παιχνίδι , να βρείτε τον δειγματικό χώρο του πειράματος.

Λύση



Ω = {αα , αβα , αββ , ββ , βαα , βαβ }

2.

Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές . Να βρείτε τα ενδεχόμενα :
Α : "Το αποτέλεσμα της $1^{ης}$ ρίψης είναι μεγαλύτερο από το αποτέλεσμα της $2^{ης}$ "
Β : "Το άθροισμα των ενδείξεων στις δύο ρίψεις είναι άρτιος αριθμός "
Γ : "Το γινόμενο των ενδείξεων στις δύο ρίψεις είναι μικρότερο του 5 "
Στη συνέχεια να βρείτε τα ενδεχόμενα .
$A \cap B$, $A \cap \Gamma$, $B \cap \Gamma$, $(A \cap B) \cap \Gamma$

Λύση

Στο πείραμα αυτό για να βρούμε τον δειγματικό χώρο μας συμφέρει να φτιάξουμε πίνακα διπλής εισόδου

$2^η$ ρίψη / $1^η$ ρίψη	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1 ,3)	(1,4)	(1, 5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Ο δειγματικός χώρος περιέχει σαν στοιχεία όλα τα αποτελέσματα του παραπάνω πίνακα διπλής εισόδου

Α = { (2,1) , (3,1) , (3,2) , (4,1) , (4,2) , (4,3) , (5,1) , (5,2) , (5, 3) , (5,4) , (6,1) , (6,2), (6,3) , (6,4) , (6,5)}

Β = {(1,1), (1,3) , (1,5) , (2,2) , (2,4) , (2,6) , (3,1) , (3,3) , (3 ,5) , (4,2), (4,4) , (4 , 6), (5 ,1) ,(5, 3) , (5,5) , (6,2) , (6 ,4) , (6,6)}

Γ={(1,1) , (1 ,2) , (1, 3) , (1,4) , (2,1) , (2 , 2) , (3 , 1) , (4, 1)}

$A \cap B$ = {(3 ,1) , (4, 2) , (5 , 1) , (5 , 3) , (6 , 2) , (6 , 4)}

$A \cap \Gamma$ = { (2 , 1) , (3 , 1) , (4 ,1)}

$B \cap \Gamma$ ={ (1 , 1) , (1, 3) , (2 , 2) , (3 , 1) }

$(A \cap B) \cap \Gamma$ ={ (3,1) }

3.

Αν Α και Β είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , να αποδείξετε ότι :
αν $A \subseteq B$ τότε $B' \subseteq A'$

Λύση

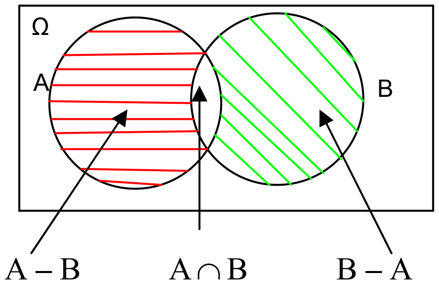
Αρκεί να αποδείξουμε ότι το τυχαίο στοιχείο x του Β΄ ανήκει και στο Α΄ .
$x \in B' \Rightarrow x \notin B$ και αφού $A \subseteq B \Rightarrow x \notin A \Rightarrow x \in A'$

4.

Έστω A και B ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω . Να γράψετε το ενδεχόμενο $A \cup B$ ως ένωση τριών ξένων μεταξύ τους ενδεχομένων .

Λύση

Έστω το παρακάτω διάγραμμα του Venn



$$A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)\ .$$